2018 年 5 月 17 日

電磁気学 II　演習問題 5

学籍番号：

氏名：

1. ストークスの定理を用いて，以下のマクスウェル方程式の微分形を導け。[3 点]

$$\int_C E_{\parallel} dl = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

左辺はストークスの定理より，

$$\int_C E_{\parallel} dl = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{E}) d\boldsymbol{S}$$

となる。また，右辺は

$$-\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S B_{\perp} dS = -\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

となる。

積分曲面 S のとりかたは任意であるから，

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

が導かれる。

（問題は裏面にもあります。）

2. $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$を満たすベクトル$\mathbf{B}$ に対して，$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$となることを示せ。
ただし， $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$，$\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$とする。 [4 点]

$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$より，

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

と表せる。このとき，

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{B} &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる。